

弹性模量和泊松比对边坡稳定安全系数的影响

张培文¹, 陈祖煜²

(1. 中冶集团建筑研究总院, 地基所 北京 100088; 2. 中国水利水电科学研究院 岩土工程研究所, 北京 100044)

摘 要: 根据土的弹性模量和泊松比满足双曲线关系, 给出了弹性模量和泊松比折减的基本原理。通过算例分析表明, 调整泊松比对安全系数的求解是有影响的, 而弹性模量的影响一般较小。算例亦表明, 位移控制方法具有较高的稳定性和收敛性, 在运用有限元强度折减方法求解边坡的安全系数时, 建议采用位移控制方法来控制其收敛性。

关 键 词: 安全系数; 弹性模量; 泊松比; 强度折减

中图分类号: TU 473

文献标识码: A

Influences of soil elastic modulus and Poisson's ratio on slope stability

ZHANG Pei-wen¹, CHEN Zu-yu²

(1. Central Research Institute of Building & Construction MMI, Beijing 100088, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

Abstract: The reduction theory for elastic modulus and Poisson's ratio is given according to the stress-strain hyperbolic curve of the soil. The result of an example shows that the Poisson's ratio has a significant influence on the safety factor and the plastic zone of the slope; but the elastic modulus don't have a significant influence; the displacement controlled-method is suggested to take for the finite element analysis to solve the safety factor of slopes because of this method is good in stability and convergence.

Key words: safety factor; elastic modulus; Poisson's ratio; strength reduction

1 前 言

有限元强度折减系数法正逐渐成为求解边坡稳定分析研究的新趋势。其基本原理^[1~5]是: 将岩土材料参数 c , ϕ 值除以一折减系数 F 得到一组新的 c' , ϕ' 值 (图 1), 然后代入有限元进行试算。当计算结果“正好”收敛时 (若折减系数再稍大一些, 数量级一般为 10^{-3} 时计算不收敛) 的 F 即为边坡稳定的安全系数, 此时坡体内具有一定宽度塑性区即为边坡失稳时的滑移带。但是, 对于其它参数的弹性模量和泊松比折减讨论的还不是很详细, 如文[1]没有给出具体的弹性模量 E 和泊松比 ν , 取 $E = 100 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$ 。文[3]指出了对泊松比进行折减的必要性。本文采用土体应力-应变满足的双曲线的关系曲线和摩尔-库仑准则, 给出了对弹性模量和泊松比折减的必要性, 及折减方法。

2 基本原理

2.1 弹性模量的折减原理和方法

土通常是各向异性、非均质、非线性弹性体。

它的应力-应变和强度特性是非常复杂的, 即使是单一的均质土体, 也要受到应力历史、应力路径和应力水平的制约。目前最常用的是 E - ν 模型, 即弹性常数存在双曲线关系, 如图 1 所示, 图中 a , b 为试验常数; σ_1 , σ_3 分别为大、小主应力; ε_1 为轴向应变; E_i 为初始弹性模量; $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 为 $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ 时 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 的渐进线,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{E_i}{a + b\varepsilon_1} \quad (1)$$

根据微分关系可以求得切线模量 E_t :

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial\varepsilon_1} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2} \quad (2)$$

可以求出以下两种情况时的弹性模量:

当 $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ 时,

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \rightarrow 1/b = (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (3)$$

当 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 时

$$E_t = 1/a = E_i \quad (4)$$

根据摩尔-库仑破坏准则可以求得破坏时的剪应力:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (5)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (6)$$

由文[6]可知,

$$E_t = (1 - R_f s)^2 E_i \quad (7)$$

式中 $s = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$; $R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$, 称为破坏比; E_i 为材料的初始弹性模量,

$$E_i = K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (8)$$

式中 p_a 为大气压力; K, n 为试验常数。

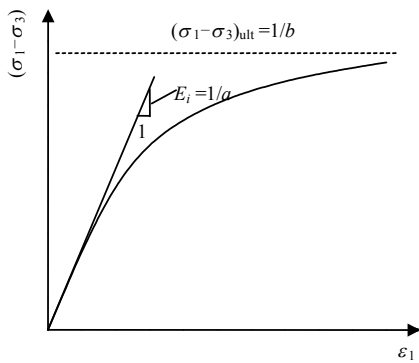


图 1 土的应力-应变关系示意图

Fig.1 Stress-strain curve for the soil

由式(7)可知,对于给定的某种土 R_f 为定值时,初始弹性模量也是不变的。随着 s 的增大,土的弹性模量逐渐减小,也就是说,在运用强度折减有限元方法来求解边坡的安全系数时,由于在外荷载的作用下坡体内应力分布是不变的,因此摩尔圆(图 2)上的任意点 A 的 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 值是不变的。随着材料参数 c 和 ϕ 折减,材料的抗剪强度 $\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 折减过程如图 2 所示,图中 F_1 和 F_2 分别为材料的折减系数。随着材料参数的折减,坡体内点的应力状态(摩尔圆上的应力点)逐渐接近于屈服。

由式(7)也可知,土的弹性模量与材料破坏时的应力状态有关,亦即对应折减系数 F_1 有一组材料参数 c_1 和 ϕ_1 , 由摩尔-库仑准则可以求得此种材料参数对应于破坏时的最大的应力,即 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 的大小。因此可以由式(7)来确定对应的材料参数的弹性模量,具体实现过程如下:

① 假设对应材料参数 c 和 ϕ 的弹性模量 E_1 由式(7)求得,即

$$E_1 = \left[1 - \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \right]^2 E_i \quad (9)$$

② 给定一强度折减系数 F_2 , 可以先求得材料参数 c_2 和 ϕ_2 , 然后求 E_2 :

$$E_2 = \left[1 - F + F \sqrt{\frac{E_1}{E_i}} \right]^2 E_i \quad (10)$$

③ 以 E_2, c_2, ϕ_2 为材料参数进行有限元分析;

④ 若已达到极限状态,取 $F=F_2$ 结束分析,否则取一个新的强度折减系数 F_2 重复步②。

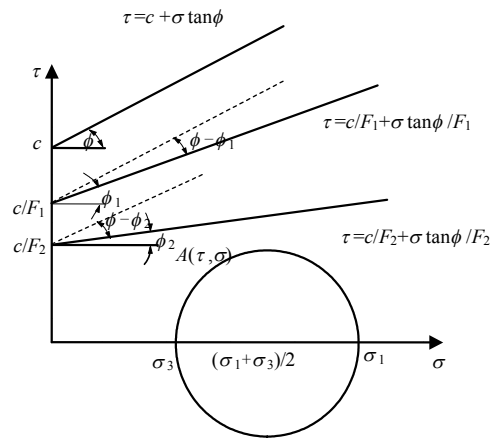


图 2 有限元分析中强度折减示意图

Fig.2 Strength reduction procedure for finite element

2.2 泊松比的折减原理和方法

对于坡体材料泊松比的折减,主要是根据摩尔-库仑准则和试验结果来推导的。

2.2.1 采用摩尔-库仑准则推导的泊松比的折减方法^[3]

假定某种土充满了半无限空间,其中的应力场仅为自重应力场,其符号按弹性力学的规定,对于地面水平如图 3, 则有:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -K\gamma h; \quad \sigma_3 = -\gamma h \quad (11)$$

式中 h 为距水平地面的深度; γ 为重度; K 为侧压力系数,

$$K = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (12)$$

由摩尔-库仑准则得:

$$\tau \leq c + \sigma \tan \phi \quad (13)$$

再由摩尔圆可以求得 τ, σ , 代入式(13)得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi &\leq c + \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right] \tan \phi; \\ (\sigma_1 - \sigma_3) &\leq 2c \cos \phi + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

整理得:

$$\sigma_1(1 - \sin \phi) - \sigma_3(1 + \sin \phi) \leq 2c \cos \phi \quad (15)$$

将式(11)代入式(15)得:

$$\gamma h(1 + \sin \phi) - K\gamma h(1 - \sin \phi) \leq 2c \cos \phi \quad (16)$$

当 $h \rightarrow \infty$ 时, 得:

$$\sin \phi \geq \frac{1-K}{1+K} = 1 - 2\nu \quad (17)$$

分析可知, 若 $\sin \phi < 1 - 2\nu$, 对于半无限空间, 在一定的深度以下的土或岩石都将处于塑性状态; 但对于无黏性土 ($c=0$), 整个半无限空间都处于塑性状态, 显然与实际情况不符。故对于满足摩尔-库仑准则的材料来说, 其摩擦角 ϕ 与泊松比 ν 之间必存在关系见式(17)。

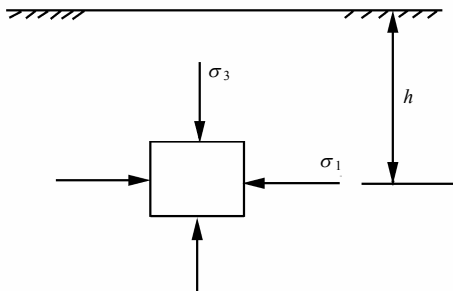


图3 水平地面下深度为 h 处的应力分布
Fig.3 Stress distribution at $z=h$ point

基于以上分析, 在对边坡进行有限元分析时, 如果仅对强度参数进行折减, 塑性区域一般首先出现在坡体的深处而不是边界附近; 当强度参数降低到一定程度时, 由于深部的塑性区域已经贯通整个模型, 导致计算结果不收敛, 计算结果失败, 而潜在在滑移通道上的塑性区却可能未贯通, 导致计算出的安全系数偏小。

在对强度参数折减的同时, 为了保持式(17)成立, 可假定如下关系式成立:

$$\sin \phi_i = \beta(1 - 2\nu_i) \quad (18)$$

式中 ϕ_i 和 ν_i 为对应折减系数 F_i 后的值; β 为常数, 则可以通过未折减的内摩擦角和泊松比的值来求常数 β , 即

$$\beta = \frac{\sin \phi}{1 - 2\nu} \quad (19)$$

式中 ϕ 和 ν 为材料的真实参数。由式(17)可知, $\beta \geq 1$ 。若考虑比较极端的情况, 即折减系数 $F_i \rightarrow \infty$ 时, 由式(18)有 $\nu \rightarrow 0.5$, 由此可知式(19)的合理性。

2.2.2 采用试验数据推导的泊松比折减方法

根据某些试验结果, 可以假定在轴向应变 ε_1 和侧向应变 ε_3 之间存在双曲线关系。但是, 根据文[6]可知, 采用此双曲线关系计算结果偏大, 因此采用如下关系:

$$\nu_t = \nu_i + (\nu_{tf} - \nu_i) \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (20)$$

式中 ν_t 为切线泊松比; ν_i 为初始泊松比; ν_{tf} 为破坏时的切线泊松比, 可取为 0.48~0.49, 其它符号同前。由于初始的泊松比 ν_i 为常数, 比 ν_{tf} 也为常数, 令

$$\alpha = \nu_{tf} - \nu_i \quad (21)$$

则式(19)变为

$$\nu_t - \nu_i = \alpha \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \quad (22)$$

在对强度参数进行折减的同时, 由于材料破坏时的强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 减小, 由式(22)必须对此时的泊松比进行调整, 当折减系数为 F_2 时泊松比计算如下, 且由式(22), 有

$$\nu_{t2} - \nu_i = \alpha \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{f2}} \quad (23)$$

式中 ν_{t2} 为折减后的泊松比; $(\sigma_1 - \sigma_3)_{f2}$ 为折减后材料的破坏强度。折减后的破坏强度为

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{f2} = (\sigma_1 - \sigma_3)_f / F_2 \quad (24)$$

由式(22)~(24)可得折减后的泊松比:

$$\nu_{t2} = \nu_i + F_2(\nu_t - \nu_i) \quad (25)$$

由式(10)、式(25)可知, 随着材料强度参数折减, 材料的泊松比 ν 将增加, 而弹性模量 E 将减小。

3 有限元数值计算的实现

根据以上分析, 采用有限元算法如下:

① 首先将材料的实际强度参数代入式(19)求

得参数 β ;

② 给定一强度折减系数 F_2 , 求折减后的强度参数 c_2 , ϕ_2 和弹性模量 E_2 ;

③ 根据式 (25), 计算新的泊松比 ν_3 。若此泊松比值能满足如下关系式:

$$\sin \phi_2 \geq (1 - 2\nu_2), \quad \nu_s \leq 0.5 \quad (26)$$

继续步④的计算; 若不能满足, 须按照式 (27) 来确定泊松比的大小。

$$\nu_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin \phi_2}{\beta} \right) \quad (27)$$

④ 根据步②, ③确定的材料参数进行有限元分析, 若已达到了极限状态, 取安全系数 $F = F_2$, 结束分析, 否则, 取一个新的强度折减系数 F_2 重复步②~④的分析。

4 算例及分析

某均质土坡, 坡角为 26.57° , 几何尺寸见图 4, 有限元网格见图 5, 材料参数见表 1。取坡体底边界为固定约束, 左右边界为水平约束, 其它面为自由约束。

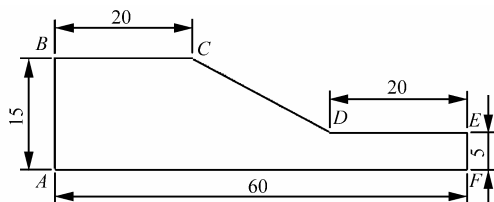


图 4 土坡几何模型(单位: m)
Fig.4 Geometric model of the slope(unit: m)

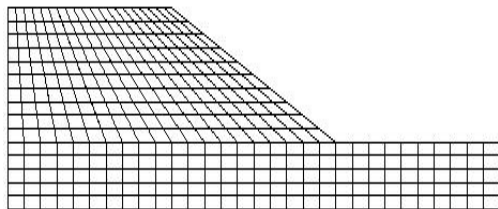


图 5 有限元模型
Fig.5 Finite element grid

表 1 材料参数

Table 1 The material parameters of the slope				
凝聚力 c/kPa	内摩擦角 $\phi/(^\circ)$	弹性模量 E/kPa	泊松比 ν	重度 $\gamma/\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$
10.0	20.0	1×10^5	0.4	20.0

分析可知, 随着折减系数的增加, 材料的抗剪强度减小, 当接近极限状态时材料的塑性应变突然增大, 如图 6 所示。无论对弹性模量 E 和泊松比 ν 是否调整, 当折减系数达到一定的值时, 节点的最大塑性应变都有共同的发展趋势, 即塑性应变突然增大。可以根据此关系曲线来判断材料是否达到极限状态, 即坡体是否失稳, 此时对应的折减系数即为坡体对应的安全系数。

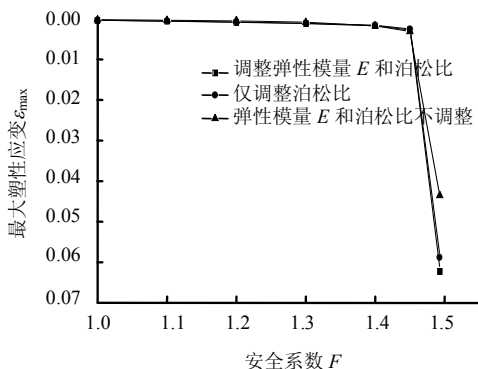


图 6 节点最大塑性应变与安全系数的关系图
Fig.6 Maximum plastic strain of the node-safety factor curve

本文算例进行了三种情况的分析讨论: ① E 和 ν ; ② 仅调整 ν ; ③ 不调整 E 和 ν 。通过对这三种情况的塑性区的分析 (图 7) 可以得出如下结论: 调整泊松比对安全系数和塑性区的分布是相当重要的, 调整弹性模量 E 对安全系数和塑性区的分布只产生很小的影响, 但是弹性模量 E 也不能很小, 若很小, 则对安全系数会产生很大的影响, 例如弹性模量取很小时, (一般来说若没有实际的测量数值, 弹性模量取 100 MPa), 对安全系数的影响不显著。若不调整弹性模量和泊松比, 安全系数的计算结果会偏大。

由图 7(a)~7(f)可知, 通过调整泊松比满足关系式 (19), 在材料抗剪强度折减的过程中坡体内部不会出现塑性区域; 而不调整 ν , 在材料抗剪强度折减的过程中, 在坡体内部过早的出现塑性区域, 如图 7(e) 的塑性分布图, 其原因主要是折减过程中。

图 7(g), 7(h)给出了不同控制方法的塑性区域, 由于位移控制方法是最有效的、最定的求解方法, 在采用强度折减求解坡体的安全系数时, 建议采用位移控制方法。

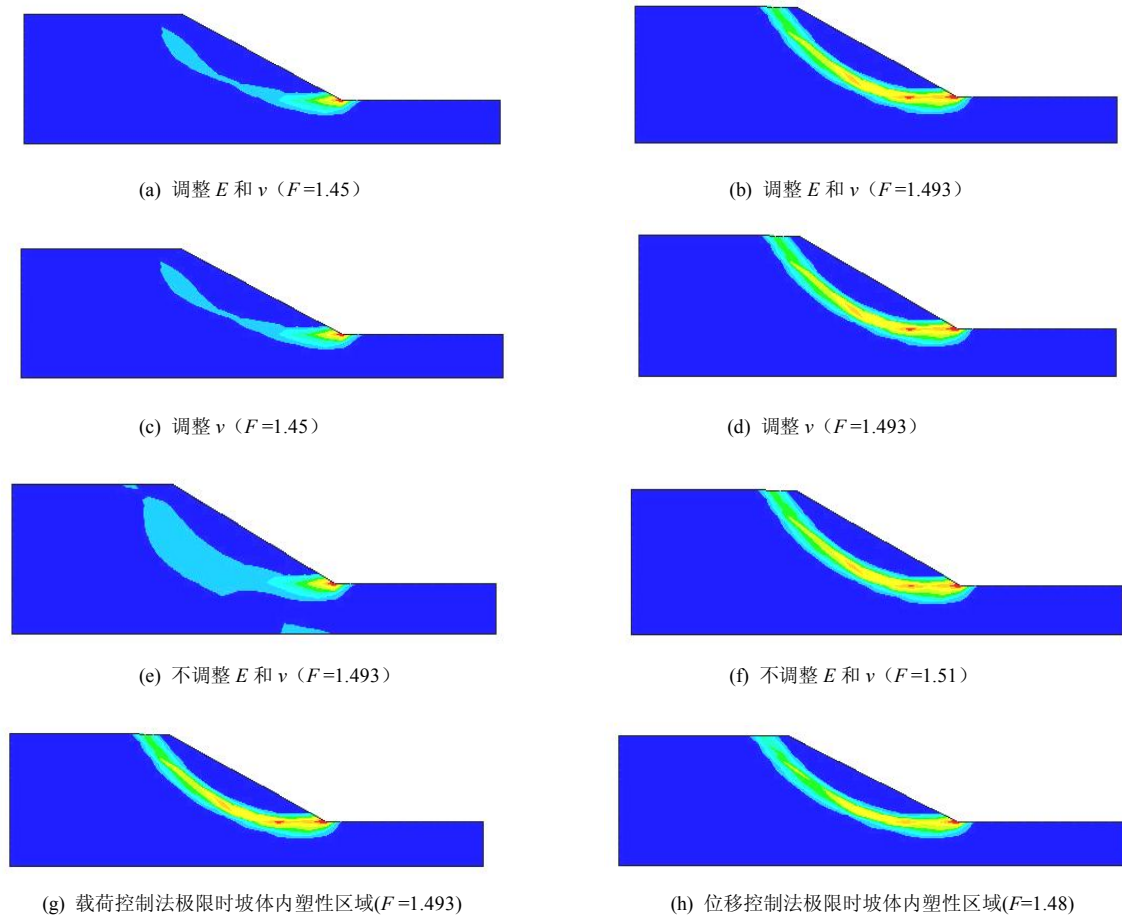


图7 塑性区分布

Fig.7 Plastic zone of the slope

5 结 语

本文讨论了强度折减求解边坡稳定安全系数的过程中对泊松比和弹性模量折减的理论原理以及数值实现过程,并通过算例说明二者对求解安全系数的影响规律,即调整泊松比 ν 对边坡稳定的安全系数的求解是有影响的,弹性模量 E 的影响较小。因此,在运用强度折减法来求解边坡的安全系数时,建议对泊松比和弹性模量都进行折减。文中也讨论了位移控制法和荷载控制法对求解结果的影响,分析算例表明采用位移控制方法具有很好的收敛性,因此在采用有限元方法求解边坡稳定的安全系数时,建议采用位移控制方法作为收敛的准则。

参 考 文 献

- [1] Griffith D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite element[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387—403.
- [2] 郑宏, 李焯芬, 谭国焕, 等. 有限元分析中的位移控制法及其应用[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(1): 81—85.
ZHENG Hong, Lee C F, TAN Guo-huan, et al.

Displacement-controlled method in finite element analysis and its applications[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(1): 81—85.

- [3] 郑宏, 李焯芬, 谭国焕, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(5): 626—628.
ZHENG Hong, Lee C F, TAN Guo-huan, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(5): 626—628.
- [4] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(6): 835—840.
- [5] 张鲁渝, 时卫民, 郑颖人. 平面应变条件下土坡稳定有限元分析[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(4): 487—490.
ZHANG Lu-yu, SHI Wei-min, ZHENG Yin-ren. The slope stability analysis by FEM under the plane strain condition[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(4): 487—490.
- [6] 钱家欢. 土力学[M]. 南京: 河海大学出版社, 1994. 300—350.